JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 19, No. 2, January 2023, pp. 423- 432
DOI: 10.20956/j.v19i2.24291

On Jointly β-Prime (R, S)-Submodules

Seputar (R, S)-Submodul Prima-β Gabungan

Dian Ariesta Yuwaningsih[1*], Fayi Salsabila Sumaryati[2*]

[*]*Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Ahmad Dahlan, Indonesia*

E-mail: *dian.ariesta@pmat.uad.ac.id[1], fayi1800006130@webmail.uad.ac.id[2]*

Received: 24 November 2022; Accepted: 22 December 2022; Published: 5 January 2023

Abstract

Given R and S be commutative ring with unity. The (R, S)-bimodule structure has been generalized into the (R, S)-module structure. Likewise, primeness in a module has also been generalized to the (R, S)-module structure. However, the existing prime definition only focuses on scalar multiplication operations in modules. The β-prime submodule is one of the generalizations of the prime submodule, which involves additive operations and scalar multiplication in the module. This article presents a generalization of the β-prime submodules into the (R, S)-module structure, hereinafter referred to as the jointly β-prime (R, S)-submodules. Furthermore, at the end of this article some properties of the jointly β-prime (R, S)-submodule are presented.

Keywords: prime, β-prime, (R, S)-module, β-prime (R, S)-submodule

Abstrak

Diberikan R dan S merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Struktur (R, S)-bimodul terlah diperumum menjadi struktur (R, S)-modul. Begitu halnya dengan keprimaan di dalam suatu modul juga telah mengalami perumuman ke struktur (R, S)-modul. Namun, definisi keprimaan yang ada selama ini hanya berfokus pada operasi pergandaan skalar di dalam modul. Submodul prima-β merupakan salah satu perumuman dari submodul prima yang melibatkan operasi aditif dan pergandaan skalar di dalam modul. Pada artikel ini disajikan generalisasi dari submodul prima-β ke dalam struktur (R, S)-modul, yang selanjutnya disebut (R, S)-submodul prima-β gabungan. Selanjutnya, pada akhir artikel ini disajikan beberapa sifat dari (R, S)-submodul prima-β gabungan.

Kata kunci: prima, prima-β, (R, S)-modul, (R, S)-submodul prima-β

1. PENDAHULUAN

Penelitian terkait keprimaan pada suatu modul pertama kali diperkenalkan oleh [2]. Hasil dari penelitian [2] selanjutnya menjadi dasar dalam penelitian-penelitian lanjutan tentang keprimaan pada suatu modul hingga saat ini. Beberapa hasil pengembangan dari definisi submodul prima diantaranya adalah submodul semiprima [3], submodul endoprima [4], submodul kedua [10], submodul koprima [9], dan submodul prima lemah [1]. Namun, beberapa perumuman dari submodul prima tersebut hanya berfokus pada pergandaan skalar di dalam modul. Padahal modul juga memiliki operasi penjumlahan yang dibawa dari struktur grupnya. Submodul prima-α merupakan salah satu generalisasi dari submodul prima yang melibatkan semua operasi dari struktur modulnya, tidak hanya operasi pergandaan skalarnya saja. Konsep terkait submodul prima-α ini diperkenalkan oleh [5]. Apabila diberikan submodul H di dalam suatu modul M, maka didefinisikan himpunan $\alpha(H) = \{h \in M \mid h + h \in H\}$. Selanjutnya, suatu submodul sejati P di M disebut submodul prima-α jika untuk setiap elemen $r \in R$ dan elemen $m \in M$ dengan $r(m + m) \in P$ maka berakibat $r + r \in (P:_R M)$ atau $m \in \alpha(P)$.

Dalam penelitian lanjutannya, [6] mendefinisikan konsep submodul prima-β. Apabila diberikan submodul H di dalam suatu modul M, didefinisikan himpunan $\beta(H) = \{h + h \mid h \in H\}$. Suatu submodul sejati P di M disebut submodul prima-β jika untuk setiap elemen $r \in R$ dan elemen $m \in M$ dengan $rm \in P$ maka berakibat $r + r \in (P:_R M)$ atau $m + m \in \beta(P)$. Lebih lanjut, dalam Khumprapussorn [8] dikatakan bahwa setiap submodul prima merupakan submodul prima-β, sehingga dapat dikatakan bahwa submodul prima-β ini merupakan salah satu perumuman dari submodul prima. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan pula bahwa submodul prima-β ini merupakan salah satu bentuk perumuman dari submodul prima-α. Oleh karena itu, terdapat perumuman lainnya dari submodul prima yang tidak hanya melibatkan operasi pergandaan skalar pada modulnya tetapi juga melibatkan semua operasi dalam struktur modulnya.

Di sisi lain, suatu modul telah mengalami proses perumuman menjadi suatu bimodul. Dan bimodul sendiri telah diperumum menjadi struktur (R, S)-modul. Konsep terkait (R, S)-modul ini pertama kali diperkenalkan oleh [7]. Dalam papernya, [7] juga telah mengenalkan pendefinisian beberapa keprimaan di dalam (R, S)-modul, yaitu (R, S)-submodul prima penuh dan (R, S)-submodul prima gabungan. Beberapa sifat terkait (R, S)-submodul prima penuh dan (R, S)-submodul prima gabungan juga telah disajikan dalam paper [7]. Dalam papernya yang lain, [8] juga mendefinisikan keprimaan lain di dalam (R, S)-modul, yang disebut (R, S)-submodul prima-R kiri. Selain itu, [11] juga telah mendefinisikan (R, S)-submodul prima-α gabungan sebagai perumuman dari submodul prima-α dalam paper [5].

Penelitian terkait submodul prima-β yang disajikan dalam paper [6] merupakan suatu hal yang baru. Konsep terkait submodul prima-β ini belum digeneralisasi ke dalam struktur (R, S)-modul. Selama ini peneliti berusaha mengembangkan konsep keprimaan di dalam struktur (R, S)-modul dengan cara mengamati perkembangan di seputar topik ini. Oleh karena itu, pada artikel ini dikembangkan konsep terkait submodul prima-β pada suatu modul ke dalam struktur (R, S)-modul. Pada artikel ini disajikan pendefinisian (R, S)-submodul prima-β gabungan, sebagai generalisasi dari (R, S)-submodul prima-α. Selanjutnya, disajikan sifat-sifat dari (R, S)-submodul prima-β gabungan dengan mengembangkan sifat-sifat submodul prima-β dalam [6] dan mengembangkan sifat-sifat submodul prima lainnya dalam [2] dengan tetap memperhatikan konsep struktur (R, S)-modul dalam [7]. Lebih lanjut, dalam keseluruhan tulisan ini, R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, kecuali dinyatakan selain itu.S

2. $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S})$-SUBMODUL PRIMA-$\boldsymbol{\beta}$ GABUNGAN

Sebelum mendefinisikan (R,S)-submodul prima-β gabungan, berikut diberikan suatu sifat dalam [7] yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Proposisi 2.1. *Diberikan (R,S)-submodul N di M, himpunan tak kosong $X \subseteq R$, dan himpunan tak kosong $Y \subseteq S$. Jika M memenuhi sifat $a \in RaS$ untuk setiap $a \in M$, maka:*

a) *Jika $(RX)MS \subseteq N$ maka $XMS \subseteq N$.*

   $XMS \subseteq (XR)MS$

b) *Jika $RM(YS) \subseteq N$ maka $RMY \subseteq N$.*

   $RMY \subseteq RM(SY)$

c) *$W \subseteq RWS$ untuk setiap himpunan tak kosong W di M.*

   Lebih lanjut, jika W merupakan (R,S)-submodul di M maka $W = RWS$.

Sebelumnya, berikut disajikan definisi (R,S)-submodul prima gabungan pada [7] dalam beberapa versi.

Definisi 2.2. *Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dan (R,S)-modul M dengan sifat untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap $a \in R$, $m \in M$, dan $b \in S$ dengan $amb \in P$ maka berakibat $aMb \subseteq P$ atau $m \in P$.*

Definisi 2.3. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $amS \subseteq P$ maka berakibat $aMS \subseteq P$ [$atau\ a \in (P:_R M)$] atau $m \in P$.*

Selanjutnya, berikut disajikan definisi dari (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Definisi 2.4. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima-β gabungan jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rmS \subseteq P$ maka berakibat $r + r \in (P:_R M)$ atau $m + m \in P$.*

Berikut disajikan suatu sifat yang menyatakan bahwa (R,S)-submodul prima-β gabungan merupakan perumuman dari (R,S)-submodul prima.

Proposisi 2.5. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Setiap (R,S)-submodul prima gabungan di M merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan.*

Bukti. Misal, diambil sebarang (R,S)-submodul prima gabungan P di M. Akan ditunjukkan bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rmS \subseteq P$. Karena diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima gabungan maka $r \in (P:_R M)$ atau $m \in P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul maka $m + m \in P$. Di sisi lain, karena $S^2 = S$ maka $(P:_R M)$ merupakan ideal di R, sehingga $r + r \in (P:_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Contoh 2.6. Diberikan ring $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b \in 2\mathbb{Z}\right\}$ dan ring $S = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b \in 2\mathbb{Z}\right\}$. Berdasarkan [7] diketahui bahwa $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in 2\mathbb{Z}\right\}$ merupakan (R,S)-modul. Dapat ditunjukkan bahwa (R,S)-submodul X di M dengan $X = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x,y \in 2\mathbb{Z}\right\}$ merupakan (R,S)-submodul prima gabungan di M. Jadi, terbukti bahwa X merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.

3. BEBERAPA SIFAT (R,S)-SUBMODUL PRIMA-β GABUNGAN

Pada bagian ini disajikan beberapa sifat dari (R,S)-submodul prima-β gabungan. Berikut disajikan beberapa syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul agar membentuk (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 3.1. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul sejati P di M. Pernyataan-pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen.*

(a). P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M.

(b). Untuk setiap ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$ maka berakibat $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$.

(c). Untuk setiap $a \in R$ dan (R,S)-submodul N di M dengan $aNS \subseteq P$ maka berakibat $a + a \in (P:_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$.

(d). Untuk setiap ideal I di R dan $m \in M$ dengan $ImS \subseteq P$ maka berakibat $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$ atau $m + m \in P$.

(e). Untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $aRmS \subseteq P$ maka berakibat $a + a \in (P:_R M)$ atau $m + m \in P$.

(f). Untuk setiap $m \in M$ jika $m + m \notin P$ maka $(P:_R m) \subseteq \alpha((P:_R M))$.

Bukti. $(a) \Rightarrow (b)$. Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$ tetapi $\beta(N) \nsubseteq P$. Akan dibuktikan bahwa $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$. Diambil sebarang elemen $r + r \in \beta(I)$ dan $n + n \in \beta(N)$ dengan $n + n \notin P$. Diperoleh $n \in N$ dan $r \in I$. Karena diketahui $INS \subseteq P$ maka diperoleh $rnS \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M dan $n + n \notin P$ maka diperoleh $r + r \in (P:_R M)$. Karena pengambilan elemen $r + r \in \beta(I)$ sebarang, maka terbukti bahwa $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Diambil sebarang elemen $a \in R$ dan (R,S)-submodul N di M dengan $aNS \subseteq P$. Karena $S^2 = S$ maka diperoleh $RaNS = RaNSS = R(aNS)S \subseteq RPS = P$. Karena R merupakan ring komutatif, maka jelas bahwa Ra merupakan ideal di R. Berdasarkan (b) diperoleh $\beta(Ra) \subseteq (P:_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Diperhatikan bahwa karena $\beta(Ra) \subseteq (P:_R M)$ maka diperoleh $Ra + Ra \subseteq (P:_R M)$ sehingga $RaMS + RaMS \subseteq P$ atau dituliskan $Ra(M + M)S \subseteq P$. Selanjutnya, karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ maka diperoleh $a(M + M)S \subseteq P$ atau dituliskan $aMS + aMS \subseteq P$. Dari sini diperoleh $a + a \in (P:_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $a + a \in (P:_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$.

$(c) \Rightarrow (d)$. Diambil sebarang ideal I di R dan elemen $m \in M$ dengan $ImS \subseteq P$ tetapi $m + m \notin P$. Akan dibuktikan bahwa $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$. Diambil sebarang elemen $a + a \in \beta(I)$, berarti $a \in I$. Selanjutnya, karena R komutatif dan $S^2 = S$ maka diperoleh $RImSS = IRmSS = I(RmS)S \subseteq RMS = P$. Karena $a \in I$ maka diperoleh $a(RmS)S \subseteq P$. Berdasarkan (c) maka diperoleh $a \in (P:_R M)$ atau $\beta(RmS) \subseteq P$. Karena $m + m \in RmS$ dan $m + m \notin P$, maka berakibat $\beta(RmS) \nsubseteq P$. Karena $S^2 = S$ maka $(P:_R M)$ merupakan ideal di R sehingga diperoleh $a + a \in (P:_R M)$. Karena pengambilan elemen $a + a \in \beta(I)$ sebarang, maka terbukti bahwa $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$.

$(d) \Rightarrow (e)$. Diambil sebarang elemen $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $aRmS \subseteq P$. Oleh karena R merupakan ring komutatif, maka aR jelas merupakan ideal di R. Akibatnya, dari (d) diperoleh $\beta(aR) \subseteq (P:_R M)$ atau $m + m \in P$. Selanjutnya, dari $\beta(aR) \subseteq (P:_R M)$ maka diperoleh $aR +$

$aR \subseteq (P:_R M)$ atau dapat dituliskan $aRMS + aRMS \subseteq P$. Karena R komutatif, maka dapat dituliskan $RaMS + RaMS \subseteq P$. Oleh karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka dari persamaan $RaMS + RaMS \subseteq P$ diperoleh $aMS + aMS \subseteq P$. Dari sini diperoleh $a + a \in (P:_R M)$. Jadi, terbukti bahwa $a + a \in (P:_R M)$ atau $m + m \in P$.

$(e) \Rightarrow (f)$. Diambil sebarang $m \in M$ dengan $m + m \notin P$. Diambil sebarang $a \in (P:_R m)$ maka diperoleh $amS \subseteq P$. Karena$S^2 = S$ dan R merupakan ring komutatif maka diperoleh $RamSS = aRmS \subseteq RPS = P$. Berdasarkan (e) dan karena $m + m \notin P$, maka diperoleh $a + a \in (P:_R M)$. Dari sini diperoleh $a \in \alpha((P:_R M))$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(P:_R m) \subseteq \alpha((P:_R M))$.

$(f) \Rightarrow (a)$. Diambil sebarang elemen $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rmS \subseteq P$ tetapi $m + m \notin P$. Andaikan $r + r \notin (P:_R M)$, maka $r \notin \alpha((P:_R M))$. Oleh karena berdasarkan (f) diketahui $(P:_R m) \subseteq \alpha((P:_R M))$, maka $r \notin (P:_R m)$. Akibatnya, diperoleh $rmS \nsubseteq P$. Kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, diperoleh $r + r \in (P:_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Proposisi 3.2. *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R, S)-submodul sejati P di M. P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan jika dan hanya jika untuk setiap ideal I di R dan (R, S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$ maka berakibat $N + N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P:_R M)$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diambil sebarang ideal I di R dan (R, S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$ tetapi $N + N \nsubseteq P$. Dari sini berarti $N \nsubseteq P$. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in I$ dan $n \in N \setminus P$ maka diperoleh $xnS \subseteq P$ tetapi $n + n \notin P$. Karena diketahui P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M, maka diperoleh $x + x \in (P:_R M)$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $I + I \subseteq (P:_R M)$.

$(\Leftarrow)$. Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rmS \subseteq P$ tetapi $m + m \notin P$. Diperhatikan bahwa karena R komutatif dan $S^2 = S$ maka diperoleh $RRrmSSS = RrRmSS^2 = Rr(RmS)S \subseteq RPS = P$. Dari sini, maka diperoleh $Rr + Rr \subseteq (P:_R M)$ atau $RmS + RmS \subseteq P$. Dari $Rr + Rr \subseteq (P:_R M)$ diperoleh $RrMS + RrMS \subseteq P$. Karena $S^2 = S$, maka diperoleh $RrMSS + RrMSS \subseteq P$. Karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka diperoleh $rMS + rMS \subseteq P$, sehingga diperoleh $r + r \in (P:_R M)$. Selanjutnya, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka dari $RmS + RmS \subseteq P$ diperoleh $m + m \in P$. Dengan demikian, diperoleh $r + r \in (P:_R M)$ atau $m + m \in P$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M. □

Berikut diberikan suatu lemma yang akan digunakan dalam pembuktian sifat selanjutnya dari (R, S)-submodul prima-β gabungan.

Lemma 3.3. *Diberikan $\psi: M_1 \to M_2$ merupakan homomorfisma (R, S)-modul dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M_1(M_2)$ memenuhi $a \in RaS$, P merupakan (R, S)-submodul di M_1, dan K merupakan (R, S)-submodul di M_2.*

(a). Jika ψ merupakan epimorfisma (R, S)-modul dan $r + r \in (P:_R M_1)$, maka $r + r \in (\psi(P):_R M_2)$.

(b). Jika $r + r \in (K:_R M_2)$ maka $r + r \in (\psi^{-1}(K):_R M_1)$.

Bukti.

(a). Diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R, S)-modul dan $r + r \in (P:_R M_1)$, maka $(r + r)M_1S \subseteq P$. Diambil sebarang $m_2 \in M_2$. Karena ψ merupakan epimorfisma, maka terapat $m_1 \in M_1$ sedemikian sehingga memenuhi $\psi(m_1) = m_2$. Akibatnya, diperoleh $(r + r)m_1S \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(r + r)m_2S = (r + r)\psi(m_1)S = \psi\big((r + r)m_1S\big) \subseteq$

$\psi(P)$. Karena pengambilan elemen $m_2 \in M_2$ sebarang, maka diperoleh $(r+r)M_2S \subseteq \psi(P)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $r+r \in (\psi(P):_R M_2)$.

(b). Diketahui bahwa $r+r \in (K:_R M_2)$, maka $(r+r)M_2S \subseteq K$. Diambil sebarang $m_1 \in M_1$. Karena diketahui ψ merupakan homomorfisma, maka diperoleh $\psi\big((r+r)m_1S\big) = (r+r)\psi(m_1)S \subseteq K$. Dari sini diperoleh $(r+r)m_1S \subseteq \psi^{-1}(K)$. Karena pangambilan elemen $m_1 \in M_1$ sebarang, maka diperoleh $(r+r)M_1S \subseteq \psi^{-1}(K)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $r+r \in (\psi^{-1}(K):_R M_1)$. □

Pada proposisi berikut ini disajikan bahwa epimorfisma (R,S)-modul mengawetkan (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 3.4. *Diberikan $\psi: M_1 \to M_2$ merupakan homomorfisma (R,S)-modul dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M_1(M_2)$ memenuhi $a \in RaS$.*

(a). Jika ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dan P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_1 yang memuat $Ker(\psi)$, maka $\psi(P)$ juga merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_2.

(b). Jika K merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_2, maka $\psi^{-1}(K)$ merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_1.

Bukti.

(a). Diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dan P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_1 yang memuat $Ker(\psi)$. Akan dibuktikan bahwa $\psi(P)$ juga merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_2. Diambil sebarang elemen $r \in R$ dan $m \in M_2$ sedemikian sehingga memenuhi $rmS \subseteq \psi(P)$. Oleh karena ψ merupakan epimorfisma maka terdapat $n \in M_1$, $p \in P$, dan $s \in S$ sehingga memenuhi $rms = \psi(p)$ dan $\psi(n) = m$. Akibatnya, diperoleh:

$$\begin{aligned}\psi(p) &= rms\\ &= r\psi(n)s\\ &= \psi(rns)\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh $\psi(p - rns) = 0$, sehingga diperoleh $p - rns \in Ker(\psi)$. Oleh karena $Ker(\psi) \subseteq P$, maka $rns \in P$ sehingga $rnS \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan maka diperoleh $r+r \in (P:_R M_1)$ atau $n+n \in P$. Karena ψ epimorfisma, maka berdasarkan Lemma 3.3 a) diperoleh bahwa $r+r \in (\psi(P):_R M_2)$ atau $m+m \in \psi(P)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\psi(P)$ merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_2.

(b). Diketahui K merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_2. Akan dibuktikan bahwa $\psi^{-1}(K)$ merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_1. Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M_1$ sedemikian sehingga memenuhi $rmS \subseteq \psi^{-1}(K)$. Dari sini berarti diperoleh $\psi(rmS) \subseteq K$, sehingga $r\psi(m)S \subseteq K$. Oleh karena K merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_2, maka diperoleh $r+r \in (K:_R M_2)$ atau $\psi(m) + \psi(m) \in K$. Oleh karena ψ merupakan epimorfisma, maka berdasarkan Lemma 3.3 b) diperoleh bahwa $r+r \in (\psi^{-1}(K):_R M_1)$ atau $m+m \in \psi^{-1}(K)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\psi^{-1}(K)$ merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M_1. □

Sebelum ke pembahasan selanjutnya, diperhatikan kembali bahwa menurut [12], suatu homomorfisma (R,S)-modul $\psi: M \to {}^{M}/_{K}$ dengan definisi $\psi(m) = m + K$, untuk setiap $m \in M$

merupakan suatu epimorfisma (R,S)-modul dengan $Ker(\psi)=K$. Selanjutnya, ψ disebut dengan homomorfisma natural (R,S)-modul. Lebih jelasnya, diperhatikan proposisi berikut ini.

Proposisi 3.5. *Diberikan (R,S)-modul M dan (R,S)-submodul K di M. Suatu pengaitan $\psi: M \to {}^{M}/_{K}$ dengan definisi $\psi(m)=m+K$, untuk setiap $m \in M$ merupakan suatu epimorfisma (R,S)-modul dengan $Ker(\psi)=K$.*

Berikut disajikan suatu sifat yang merupakan akibat dari Proposisi 3.4.

Akibat 3.6. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2=S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul N di M.*

(a). Jika P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M dan K merupakan (R,S)-submodul di M yang termuat di P, maka ${}^{P}/_{K}$ merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di ${}^{M}/_{K}$.

(b). Jika K' merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di ${}^{M}/_{N}$, maka $K'={}^{K}/_{N}$ untuk suatu (R,S)-submodul prima-β gabungan K di M.

Bukti.

(a). Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M dan K merupakan (R,S)-submodul di M yang termuat di P. Dibentuk homomorfisma natural (R,S)-modul $\psi: M \to {}^{M}/_{K}$ dengan definisi $\psi(m)=m+K$, untuk setiap $m \in M$. Berdasarkan Proposisi 3.5, diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dengan $Ker(\psi)=K$. Berdasarkan Proposisi 3.4* a), maka diperoleh bahwa $\psi(P)={}^{P}/_{K}$ merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di ${}^{M}/_{K}$.

(c). Diketahui K' merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di ${}^{M}/_{N}$. Dibentuk homomorfisma natural (R,S)-modul $\psi: M \to {}^{M}/_{N}$ dengan definisi $\psi(m)=m+N$, untuk setiap $m \in M$. Berdasarkan Proposisi 3.4* b), maka diperoleh bahwa $\psi^{-1}(K')$ merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 3.5 diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul. Akibatnya, $\psi^{-1}(K')=K$ dan untuk (R,S)-submodul K' di ${}^{M}/_{N}$ terdapat (R,S)-submodul K di M sedemikian sehingga memenuhi $K'={}^{K}/_{N}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $K'={}^{K}/_{N}$ untuk suatu (R,S)-submodul prima-β gabungan K di M. □

Seperti halnya pada modul, pada struktur (R,S)-modul dapat didefinisikan (R,S)-submodul maksimal sebagai berikut.

Definisi 3.7. *Diberikan (R,S)-modul M. Suatu (R,S)-submodul sejati N di M disebut (R,S)-submodul maksimal di M apabila tidak terdapat (R,S)-submodul sejati lain di M yang memuat N.*

Berikut ditunjukkan bahwa setiap (R,S)-submodul maksimal merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 3.8. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2=S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Setiap (R,S)-submodul maksimal di M merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M.*

Bukti. Diambil K yaitu (R,S)-submodul maksimal di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq K$ tetapi $N+N \nsubseteq K$. Karena $N+N \nsubseteq K$, maka diperoleh $N \nsubseteq K$. Karena K merupakan (R,S)-submodul maksimal di M maka $M=K+N$. Dari sini diperoleh

$(I+I)MS = (I+I)(K+N)S = (I+I)KS + (I+I)NS \subseteq K$. Dengan demikian, diperoleh $I + I \subseteq (K:_R M)$. Jadi, terbukti bahwa K merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Berikut disajikan suatu sifat yang merupakan hubungan antara (R,S)-submodul prima-β gabungan dengan himpuunan annihilator (R,S)-modul faktornya.

Proposisi 3.9 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R,S)-submodul sejati P di M. Jika P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M maka $(P:_R M)$ merupakan ideal prima di R.*

Bukti. Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Diambil sebarang ideal I dan J di R dengan $IJ \subseteq (P:_R M)$ tetapi $I \nsubseteq (P:_R M)$. Dari $IJ \subseteq (P:_R M)$ diperoleh $IJMS \subseteq P$. Karena $S^2 = S$, maka diperoleh $I(JMS)S \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M maka diperoleh $JMS + JMS \subseteq P$. Jadi diperoleh $JMS \subseteq P$, sehingga terbukti $J \subseteq (P:_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(P:_R M)$ merupakan ideal prima di R. □

Seperti halnya pada modul, pada struktur (R,S)-modul dapat didefinisikan (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal sebagai berikut.

Definisi 3.10. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati X di M disebut (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal apabila X minimal di dalam himpunan semua (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, yaitu tidak terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan lain di M yang termuat di dalam X.*

Berikut ditunjukkan bahwa setiap (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 3.11. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, maka P memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal di M.*

Bukti. Misalkan dibentuk himpunan $\mathfrak{I}$ yaitu himpunan semua (R,S)-submodul prima-β gabungan di M yang termuat di dalam P. Jelas bahwa $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ karena $P \in \mathfrak{I}$. Dengan menggunakan Lemma Zorn alan dibuktikan bahwa $\mathfrak{I}$ memiliki elemen minimal. Ekuivalen dengan menunjukkan bahwa setiap rantai tak kosong di $\mathfrak{I}$ memiliki batas bawah di $\mathfrak{I}$. Diambil sebarang rantai tak kosong $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{I}$. Dibentuk himpunan $Q = \bigcap_{K \in \mathcal{H}} K$, maka jelas bahwa Q merupakan (R,S)-submodul di M dan $Q \subseteq P$. Akan dibuktikan bahwa Q merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Diambil ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq Q$ tetapi $N + N \nsubseteq Q$. Akan dibuktikan bahwa $I + I \subseteq (Q:_R M)$. Karena $N + N \nsubseteq Q$, maka $N \nsubseteq Q$. Diambil sebarang $n \in N \setminus Q$, maka terdapat $K' \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga $n \notin K'$. Karena K' merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, maka dari $INS \subseteq Q \subseteq K'$ bearkibat $(I+I)MS \subseteq K'$, atau ditulis $I + I \subseteq (K':_R M)$. Selanjutnya diambil $L \in \mathcal{H}$. Karena $\mathcal{H}$ merupakan rantai di $\mathfrak{I}$, maka berlaku $K' \subseteq L$ atau $L \subseteq K'$. Jika $K' \subseteq L$, maka $(I+I)MS \subseteq K' \subseteq L$. Jika $L \subseteq K'$ maka $n \notin L$. Karena L merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, maka dari $INS \subseteq Q \subseteq L$ berakibat $(I+I)MS \subseteq L$ atau ditulis $I + I \subseteq (L:_R M)$. Jadi, diperoleh $(I+I)MS \subseteq L$ untuk setiap $L \in \mathcal{H}$. Akibatnya, diperoleh $(I+I)MS \subseteq Q$ atau dengan kata lain $I + I \subseteq (Q:_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa Q merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Karena $Q \subseteq P$, maka $Q \in \mathfrak{I}$ dan Q merupakan batas bawah untuk $\mathcal{H}$. Jadi terbukti bahwa setiap rantai tak kosong di $\mathfrak{I}$ memiliki batas bawah di $\mathfrak{I}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma Zorn maka terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan $P^* \in \mathfrak{I}$ yang minimal diantara semua (R,S)-submodul prima-β gabungan di $\mathfrak{I}$. Dengan demikian, terbukti bahwa (R,S)-submodul prima-β gabungan P memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal P^* di M. □

Berikut disajikan syarat perlu dan syarat cukup (R,S)-submodul sejati membentuk (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 3.12. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati X di M merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M jika dan hanya jika untuk setiap (R,S)-submodul tak nol K/X di M/X memenuhi sifat $(X:_R K) = (X:_R M)$.*

Bukti. ($\Rightarrow$). Diambil sebarang (R,S)-submodul tak nol K/X di M/X, maka jelas bahwa $(X:_R M) \subseteq (X:_R K)$. Selanjutnya, diambil sebarang $r \in (X:_R K)$, maka diperoleh $rKS \subseteq X$. Karena $S^2 = S$ dan $a \in RaS$ untuk setiap $a \in M$, maka diperoleh $(rR)KS = r(RKS)S = rKS \subseteq X$. Karena X merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M maka diperoleh $K + K \subseteq X$ atau $rR + rR \subseteq (X:_R M)$. Karena K/X merupakan (R,S)-submodul tak nol, maka $K \neq X$, sehingga hanya diperoleh $rR + rR \subseteq (X:_R M)$. Akibatnya, diperoleh $rRMS + rRMS \subseteq X$. Karena sifat $a \in RaS$ untuk setiap $a \in M$, maka diperoleh $rMS + rMS \subseteq X$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $r + r \in (X:_R M)$ sehingga $r \in (X:_R M)$. Jadi diperoh $(X:_R K) \subseteq (X:_R M)$ sehingga terbukti bahwa $(X:_R K) = (X:_R M)$.

($\Leftarrow$). Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq X$ tetapi $N + N \nsubseteq X$. Karena $N + N \nsubseteq X$ maka diperoleh $N \nsubseteq X$, sehingga $(N + X)/X$ merupakan (R,S)-submodul tak nol di M/X. Menurut hipotesis, maka diperoleh $(X:_R N + X) = (X:_R M)$. Selanjutnya, dari $INS \subseteq X$ diperoleh $I \subseteq (X:_R N + X)$. Karena $(X:_R N + X) = (X:_R M)$ maka diperoleh $I \subseteq (X:_R M)$ sehingga diperoleh $I + I \subseteq (X:_R M)$. Jadi terbukti bahwa X merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Sifat terakhir dari (R,S)-submodul prima-β gabungan adalah tentang syarat perlu dan syarta cukup agar suatu (R,S)-submodul faktor membentuk (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 3.13. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul P dan A di M dengan $A \subset P$. P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M jika dan hanya jika P/A merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M/A.*

Bukti. ($\Rightarrow$). Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N/A di M/A dengan $I(N/A)S \subseteq P/A$. Dari sini diperoleh $(INS)/A \subseteq P/A$, sehingga $INS \subseteq P$. Karena diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M maka diperoleh $N + N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P:_R M)$. Dari sini diperoleh $N \subseteq P$ atau $I \subseteq (P:_R M)$ sehingga diperoleh $N/A \subseteq P/A$ atau $(IMS + A)/A \subseteq P/A$. Karena $(IMS + A)/A = I(M/A)S \subseteq P/A$, maka diperoleh $(I + I)(M/A)S \subseteq P/A$ atau dengan kata lain $I + I \subseteq (P/A:_R M/A)$. Karena $N/A \subseteq P/A$ maka diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$. Dengan demikian diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$ atau $I + I \subseteq (P/A:_R M/A)$. Jadi, terbukti bahwa P/A merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M/A.

($\Leftarrow$). Diambil sebarag ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(INS + A) \subseteq P/A$, sehingga $I\big((N + A)/A\big)S \subseteq P/A$. Karena P/A merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M/A maka diperoleh $(N + A)/A + (N + A)/A \subseteq P/A$ atau $I + I \subseteq (P/A:_R M/A)$. Dengan kata lain, diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$ atau $(I + I)(M/A)S \subseteq P/A$. Hal ini ekuivalen dengan $N + N \subseteq P$ atau $(I + I)MS \subseteq P$, sehingga diperoleh $N + N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P:_R M)$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. □

4. KESIMPULAN

Pada artikel ini, definisi submodul prima-β telah dibawa ke dalam struktur (R,S)-modul, yang selanjutnya disebut dengan (R,S)-submodul prima-β gabungan. Di samping itu, disajikan pula beberapa sifat dari (R,S)-submodul prima-β gabungan yang merupakan generalisasi dari sifat keprimaan di dalam struktur modul dengan menambahkan beberapa syarat tertentu. Lebih lanjut, hasil dari penelitian terkait (R,S)-submodul prima-β gabungan dapat digunakan sebagai referensi dalam penelitian terkait (R,S)-submodul prima-β gabungan lemah dan perumumannya yang lain.

REFERENCES

[1]. Behboodi, M. and Koohy, H., 2004, Weakly Prime Modules, *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol. 32, No. 2, Hal. 185-195.

[2]. Dauns, J., 1978, Prime Modules, *Journal fur die reine and angewandte Mathematik*, No. 298, Hal. 156-181.

[3]. Ferrero, M. dan Rodrigues, V., 2006, On Prime and Semiprime Modules and Comodules, *Journal of Algebra and Its Applications*, Vol. 5, No. 5, Hal. 681-694.

[4]. Haghany, A. dan Vedadi, R., 2005, Endoprime Modules, *Acta Math. Hungar.*, Vol 106, No. 1-2, Hal. 89-99.

[5]. Khumprapussorn, T., 2018, On α-Prime and Weakly α-Prime Submodules, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 11, No. 3, Hal. 730-739.

[6]. Khumprapussorn, T., 2019, On β-Prime Submodules, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, Vol. 25, No. 02, Hal. 128-138.

[7]. Khumprapussorn, T., Pianskool, S., dan Hall, M., 2012, (R,S)-Modules and Their Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematical Forum*, Vol. 7, No. 33, Hal. 1631-1643.

[8]. Khumprapussorn, T., 2013, Left R-Prime (R,S)-Modules, *International Mathematical Forum*, Vol. 8, No. 13, Hal. 619-626.

[9]. Wijayanti, I.E., 2006, *Coprime Modules and Comodules*, Dissertation, University of Dusseldorf, Germany.

[10]. Yassemi, S., 2001, The Dual Notion of Prime Submodules, *Archivum Mathematicum*, Vol. 37, No. 4, Hal. 273-278.

[11]. Yuwaningsih, D.A., Rusmining, dan Puguh, W.P., 2021, Beberapa Sifat (R,S)-Submodul Prima-α Gabungan, *Journal of Fundamental Mathematics and Applications* (JFMA), Vol. 4, No. 2, Hal. 167-179.

[12]. Yuwaningsih, D.A., Wijayanti, I.E., dan Prasetyo, P.W., 2019, On (R,S)-Module Homomorphisms, *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1188, no. 1.