JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e–ISSN: 2614–8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 20, No. 3, May 2024, pp. 724-742
DOI: 10.20956/j.v20i3.34476

Stock Option Pricing Using Binomial Trees with Implied Volatility

Penentuan Harga Opsi Saham dengan Menggunakan *Binomial Trees* dengan Penyertaan *Implied Volatility*

Aimmatul Ummah Alfajriyah[1]*, Endah R.M Putri[2], Daryono Budi Utomo[3**], Moch. Taufik Hakiki[4*]**

Departemen Aktuaria Institut Teknologi Sepuluh Nopember,Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember*
***Email**: aimmatulummahff@its.ac.id[1], endahrmp@matematika.its.ac.id[2], daryono@matematika.its.ac.id[3], moch.taufik22@its.ac.id[4]*

Received: 5 April 2024, revised: 8 May 2024, accepted: 9 May 2024

Abstract
The Black-Scholes model provides an analytical solution in option pricing and has been widely used in finance. This model assumes constant volatility. Pricing option incorporating implied volatility is conducted using implied binomial tree. This study aims to simulate the prices of put options and call options using implied binomial trees, binomial trees and the Black-Scholes model and determine the factors that influence option prices. The simulation was conducted using Matlab. The option price resulted from implied binomial tree and binomial tree are compared with the option prices of the Black-Scholes model to determine the difference of option prices with constant volatility and option prices incorporating implied volatility. The implied binomial tree method provides better option prices than the binomial tree based on small relative error value to the Black-Scholes model. This is caused by the transition probability value of stock price movements in the implied binomial tree at each point is different, whereas in the binomial tree the value of transition probability is same. Furthermore, increasing the time step causes the option prices obtained from the implied binomial tree converge to the Black-Scholes. It is concluded that these three methods can be used in option pricing. Factors that influence the option price are stock price, strike price, interest rate and maturity date, are also obtained.

Keywords: Binomial Tree, Black-Scholes, Implied Binomial Tree, Implied Volatility, Option

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Aimmatul Ummah Alfajriyah, Endah R.M Putri, Daryono Budi Utomo, Moch. Taufik Hakiki

Abstrak

Model Black-Scholes memberikan solusi analitik pada penentuan harga opsi dan telah digunakan secara luas dalam dunia keuangan. Model ini mengasumsikan volatilitas konstan. Penentuan harga opsi dengan menyertakan *implied volatility* dilakukan dengan menggunakan metode *implied binomial tree*. Penelitian ini bertujuan untuk melakukan simulasi harga opsi jual dan opsi beli dengan menggunakan *implied binomial tree*, *binomial tree* dan model Black-Scholes serta menentukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap harga opsi. Simulasi dilakukan dengan menggunakan pemrograman Matlab. Hasil simulasi harga opsi dari *implied binomial tree* dan *binomial tree* dibandingkan dengan harga opsi model Black-Scholes untuk mengetahui perbedaan harga opsi dengan volatilitas konstan dan penyertaan *implied volatility*. Berdasarkan simulasi, metode *implied binomial tree* memberikan harga opsi yang lebih baik daripada *binomial tree* berdasarkan nilai eror relatif terhadap harga opsi Black-Scholes. Hal tersebut disebabkan oleh nilai probabilitas transisi pergerakan harga saham pada *implied binomial tree* pada setiap titik berbeda, sedangkan pada *binomial tree* bernilai sama. Lebih lanjut, peningkatan langkah waktu mengakibatkan harga opsi yang diperoleh dari *implied binomial tree* konvergen terhadap harga opsi Black-Scholes. Disimpulkan bahwa ketiga metode tersebut dapat digunakan dalam penentuan harga opsi. Selain itu, diperoleh faktor-faktor yang berpengaruh terhadap harga opsi yaitu harga saham, harga *strike*, suku bunga, dan waktu jatuh tempo juga didapatkan.

Kata kunci: *Binomial Tree*, Black-Scholes, *Implied Binomial Tree*, *Implied Volatility*, Opsi.

1. PENDAHULUAN

Instrumen derivatif merupakan salah satu instrumen manajemen risiko yang nilainya dipengaruhi oleh perubahan harga aset-aset yang mendasarinya [10]. Hal yang mendasari adanya instrumen derivatif adalah keinginan para investor terhadap suatu investasi yang dapat meminimalisir dampak risiko. Investor membuat suatu perjanjian untuk saling mempertukarkan aset di masa mendatang, daripada memperdagangkan secara fisik suatu aset. Terdapat berbagai macam jenis instrumen derivatif yang ada di pasar modal, di antaranya adalah tiga instrumen derivatif paling fundamental, yaitu *futures*, *forward* dan opsi [10]. Opsi adalah suatu kontrak antara dua pihak bahwa pemegang kontrak dapat menjual atau membeli sejumlah aset yang mendasari kontrak tersebut (*underlying asset*) dengan harga ketetapan (*strike*) dan waktu jatuh tempo (*maturity date*) yang telah ditetapkan di awal kontrak [12] . Aset yang mendasari kontrak opsi dapat berupa saham atau surat berharga lainnya. Opsi saham banyak diperdagangkan di negara-negara yang pada umumnya memiliki kondisi pasar modal baik. Sebagai salah satu instrumen derivatif, opsi dibuat untuk meminimalkan dampak risiko dengan melakukan lindung nilai (*hedging*). Oleh karena itu, penentuan harga opsi menjadi sangat penting dilakukan agar tidak menyebabkan kerugian kepada penjual dan pembeli opsi.

Model klasik dalam penentuan harga opsi, yang telah digunakan secara luas, adalah Model Black-Scholes. Penerapan Model Black-Scholes dalam menentukan harga opsi pada berbagai kondisi telah dibahas, di antaranya di [13], [21], [23], [25] dan [28] serta referensi di dalamnya. Kelebihan model Black-Scholes yang membuatnya populer adalah tersedianya solusi analitik untuk menentukan harga opsi [2]. Namun, pada kenyataan terdapat perbedaan antara penemuan empiris dengan teori harga opsi Black-Scholes [15]. Hal ini dikarenakan asumsi pada model Black-Scholes adalah nilai volatilitas konstan. Berdasarkan asumsi tersebut, sebarang opsi jual atau opsi beli pada aset pada waktu jatuh tempo yang sama, tetapi harga *strike* berbeda, memiliki nilai *implied volatility* yang sama; yakni volatilitas yang disebabkan oleh harga pasar. Hal ini yang mendasari penelitian Yi dkk. [15]. Hasilnya adalah asumsi dari model Black-Scholes tidak terjadi pada pasar opsi di dunia riil. Nilai *implied volatility* menunjukkan bentuk *smile* terhadap harga *strike* sedemikian hingga diperoleh bentuk *smile* dari *implied volatility* yang lebih konsisten dengan pasar opsi dunia daripada asumsi dari model Black-Scholes [4]. Soini dan Lorentzen menyimpulkan bahwa dalam praktiknya *implied volatility* konsisten berubah terhadap derajat *moneyeness* dan sering ditemukan dalam bentuk *implied volatility smile* [24]. Lebih lanjut, model Black-Scholes tidak dapat menjelaskan adanya korelasi antara volatilitas dan harga aset dasar [20]. Penelitian serupa juga mendapatkan efek dari *implied volatility smile* terlihat dengan jelas pada data simulasi menggunakan model Black-Scholes [27]. Aproksimasi nilai *implied volatility* berdasarkan beberapa parameter yaitu harga *strike* dan waktu jatuh tempo dapat diperoleh menggunakan metode *deep neural network* yang membentuk suatu permukaan *implied volatility* yang tidak konstan[11]. Penelitian lain tentang volatilitas yang berubah dibahas pada [7] dan [9]. Anomali dari *implied volatility* menjadi hal yang sangat penting dalam pengembangan metode penentuan harga opsi.

Metode lain dalam penentuan harga opsi adalah *binomial tree*. Metode ini digunakan untuk menentukan harga opsi pada suatu jangka waktu dengan mensyaratkan bahwa pergerakan harga saham memiliki dua kemungkinan, yaitu naik atau turun. *Binomial tree* memiliki kelebihan salah satunya adalah dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kompleks terkait penentuan harga opsi. *Binomial tree* jauh lebih mampu menangani kondisi *early exercise* karena mempertimbangkan harga saham pada setiap periode waktu, bukan hanya harga saham pada saat waktu jatuh tempo [6]. *Binomial tree* juga dapat digunakan dalam perhitungan nilai *greeks* sensitivitas harga opsi [17]. Rubenstein menemukan teknik numerik untuk valuasi harga saham dengan asumsi bahwa perubahan harga dapat direpresentasikan menggunakan metode *binomial tree* [22]. Berlatar belakang pada kondisi riil bahwa harga opsi pasar tidak selalu konsisten dengan harga yang diperoleh dari model Black-Sholes, Derman dan Kani [4] mengontruksikan metode *implied binomial tree* yang lebih konsisten terhadap efek volatility *smile*. Metode *implied binomial tree* juga dikonstruksikan oleh Barle dan Cakiki mampu untuk menentukan harga instrumen derivatif yang konsisten dengan pasar [1]. Perluasan metode *binomial tree* Rubenstein dapat diperluas dengan menambahkan parameter yang bergantung terhadap waktu [14]. Beberapa penelitian lain juga mendapatkan bahwa metode *binomial tree* dapat digunakan dalam penentuan harga opsi tipe Eropa dikarenakan harga yang diperoleh mendekati harga opsi model Black-Scholes [16, 18, 26].

Berdasarkan penelitian terdahulu, belum tersedia penelitian yang membandingkan cara kerja dan hasil dari metode penentuan harga opsi dengan volatilitas konstan dan harga opsi dengan penyertaan *implied volatility*, padahal hal tersebut perlu dilakukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini dilakukan simulasi penentuan harga opsi menggunakan tiga metode, yaitu Black-Scholes, *binomial tree* dan *implied binomial tree*. Dimulai dari konstruksi *implied binomial tree* berdasarkan [4] dan dilanjutkan dengan simulasi harga opsi jual dan opsi beli tipe Eropa. Variasi banyaknya langkah waktu pada metode binomial (dinotasikan n) dilakukan untuk mengetahui pengaruhnya terhadap harga opsi. Selanjutnya, dilakukan perbandingan harga opsi dengan menghitung eror relatif harga opsi *binomial tree* dan *implied binomial tree* terhadap harga opsi Black-Scholes. Dilakukan pula simulasi untuk mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh terhadap harga opsi saham dengan Simulasi dilakukan dengan menggunakan pemrograman Matlab. Melalui penelitian ini, diharapkan dapat memberikan hasil dan analisis dari penentuan harga opsi saham dengan menyertakan *implied volatility* menggunakan *binomial tree*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Opsi

Opsi merupakan suatu kontrak antara dua pihak bahwa pemegang kontrak dapat menjual atau membeli sejumlah aset yang mendasari kontrak tersebut (*underlying asset*) dengan harga ketetapan (*strike*) dan waktu jatuh tempo (*maturity date*) yang telah ditetapkan [12]. Berdasarkan pembelian atau penjualan aset, opsi dibedakan menjadi dua tipe, yaitu opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). Opsi jual adalah suatu kontrak untuk menjual sejumlah aset yang mendasari kontrak dengan harga dan waktu yang telah ditentukan. Sebaliknya, opsi beli adalah suatu kontrak untuk membeli sejumlah aset yang mendasari kontrak tersebut dengan harga dan waktu yang telah ditentukan.

Opsi dapat dibedakan menjadi dua tipe berdasarkan waktu jatuh temponya, yaitu opsi tipe Eropa dan tipe Amerika. Opsi tipe Eropa (*European option*) adalah opsi yang dapat digunakan hanya pada saat waktu jatuh tempo. Opsi tipe Amerika (*American option*) adalah opsi yang dapat digunakan sebelum maupun pada waktu jatuh tempo. Perdagangan opsi dapat memengaruhi harga saham yang mendasarinya. Secara khusus, harga penutupan saham dengan opsi terdaftar mendekati harga *strike* pada waktu jatuh tempo [19].

2.2 Volatilitas

Volatilitas adalah suatu ukuran yang menunjukkan seberapa besar nilai berfluktuasi dalam suatu periode tertentu. Volatilitas dapat dibedakan menjadi dua, yaitu volatilitas historis dan volatilitas tersirat (*implied volatility*). Volatilitas historis merupakan suatu ukuran volatilitas yang dihitung berdasarkan harga saham yang telah lalu pada suatu periode waktu tertentu, sedangkan volatilitas tersirat (*implied volatility*) adalah volatilitas yang diperoleh dari harga opsi tunggal yang dikutip [12]. *Implied volatility* menjadi salah satu komponen pada model Black-Scholes dan disimbolkan dengan σ. Pada asumsi model Black-Scholes, setiap harga opsi pada sekuritas yang sama pada opsi tersebut, dengan waktu jatuh tempo (*maturity date*) yang sama, tetapi nilai harga *strike* yang berbeda akan menghasilkan *implied volatility* yang sama. Oleh karena itu, akan didapatkan garis lurus horizontal grafik *implied volatility* dari suatu opsi terhadap fungsi harga *strike*.

2.3 Model Black-Scholes

Model Black-Scholes merupakan model matematika yang utamanya digunakan dalam penentuan harga opsi. Beberapa asumsi dasar dalam model Black-Scholes adalah:

a) Harga aset yang mendasari opsi mengikuti gerak Brown-geometrik, yakni

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu dt + \sigma dW_t . \#(2.1)$$

dengan μ menyatakan expected return rate dan dW_t menyatakan gerak Brown geometrik.

b) Tingkat suku bunga bebas risiko r konstan.

c) Tidak terdapat pembayaran dividen pada aset yang mendasari.

d) Tidak terdapat biaya transaksi dan pajak.

e) Pasar bebas arbitrase.

Persamaan matematika dalam model Black-Scholes adalah

$$rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0.\#(2.2)$$

dengan $V=V(S,t)$ menyatakan harga opsi saham, S menyatakan harga saham, r menyatakan suku bunga bebas risiko dan σ menyatakan *implied volatility* [12].
Untuk mendapatkan harga opsi pada waktu $[0,t]$, perlu diselesaikan Persamaan (2.2) dengan batas (*boundary*)

$$V|_{t=T}=\begin{cases}(S-K)^+ & \text{(opsi beli)}\\ (K-S)^+ & \text{(opsi jual)}\end{cases}\#$$

pada domain $\sum=\{(S,t):0\leq S<\infty, t\geq 0\}$ dimana K merupakan harga *strike*. Penyelesaian masalah ini adalah

$$V(S,t)=C(S,t)=SN(d_1)-Ke^{-rt}N(d_2)\#(2.3)$$

untuk harga opsi beli Eropa dan

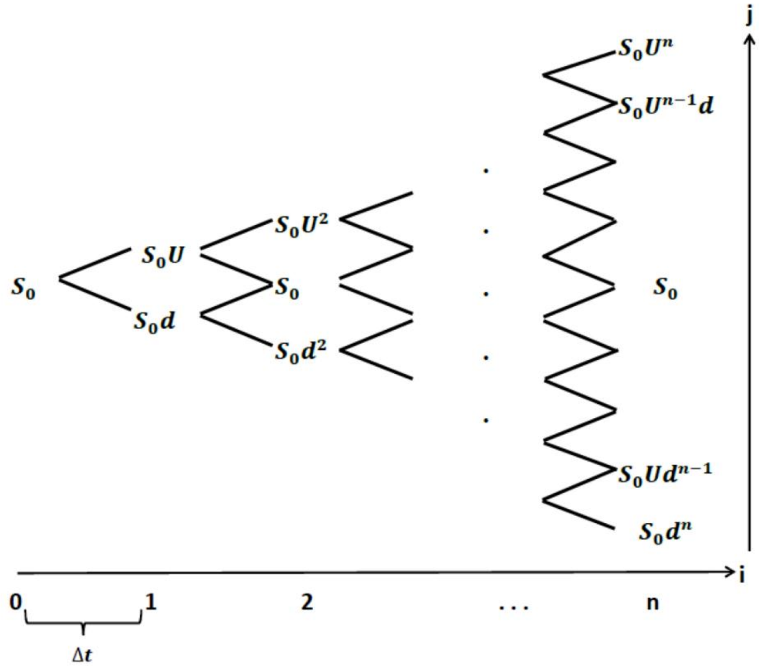
$$V(S,t)=P(S,t)=Ke^{-rt}N(-d_2)-SN(-d_1)\#(2.4)$$

untuk harga opsi jual Eropa [12]. Di sini, $N(x)$ merupakan fungsi probabilitas kumulatif dari distribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1, yaitu

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{w^2}{2}}dw.\#$$

2.4 *Binomial Tree*

Setiap model penetapan harga opsi didasarkan pada konsep lindung nilai tanpa risiko, salah satunya adalah metode *binomial tree* [3]. *Binomial tree* adalah suatu diagram yang merepresentasikan kemungkinan lintasan berbeda yang diikuti oleh harga saham selama periode umur kontrak opsi. Misalkan interval $[0,t]$ dipartisi menjadi n subinterval $\{[t_{i-1},t_i]\}_{i=1}^{n}$ dengan $t_i=i\Delta t$ untuk $i=0,1,\dots,n$ dan $\Delta t=t/n$. Pada *binomial tree* biasa, hanya terdapat dua kemungkinan pergerakan harga saham, yaitu naik atau turun dibandingkan harga sebelumnya. Dari waktu t_{i-1} ke waktu t_i, harga saham dapat bergerak naik dengan faktor sebesar u dan dapat bergerak turun dengan faktor sebesar d dengan $ud=1$. Hal ini diilustrasikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Ilustrasi *Binomial tree*

Pada setiap posisi waktu ke-i (waktu t_i) terdapat $i+1$ percabangan harga saham, kemudian sebanyak $i+1$ percabangan tersebut diposisikan secara menaik dari bawah ke atas. Harga saham di titik (i, j) untuk $0 \leq j \leq i \leq n$ didefinisikan sebagai harga saham pada waktu ke-i di percabangan ke-j. Jika S_0 adalah harga saham di waktu $t_0 = 0$ dan S_i^j menyatakan harga saham di titik (i, j), maka harga saham di titik (i, j) dirumuskan sebagai

$$S_i^j = S_0 u^j d^{i-j}, \#(2.5)$$

Menghitung harga opsi dilakukan dengan perhitungan dari ujung *binomial tree* pada waktu jatuh tempo hingga pangkal *binomial tree* pada posisi saat ini yaitu saat harga saham S_0 Perhitungan nilai payoff opsi beli dan opsi pada waktu jatuh tempo berturut-turut dengan persamaan

$$C_n^j = \max\left\{S_0 u^j d^{i-j} - K, 0\right\}, \#$$
$$P_n^j = \max\left\{K - S_0 u^j d^{i-j}, 0\right\}. \#$$

Harga opsi beli dan jual pada titik (i, j) adalah

$$C_i^j = e^{-rt}\left(pC_{i+1}^j + (1-p)C_{i+1}^{j+1}\right), \#$$
$$P_n^j = e^{-rt}\left(pP_{i+1}^j + (1-p)P_{i+1}^{j+1}\right). \#$$

Harga opsi yang dicari adalah nilai C_0^0 dan P_0^0. Pada metode *binomial tree* ini, parameter p, u dan d bernilai tetap pada setiap titik.

2.5 Harga Arrow Debreu

Harga Arrow-Debreu adalah harga opsi yang membayar 1 unit payoff jika harga saham S_t pada suatu waktu t mencapai nilai S_n^i dan 0 jika tidak [8]. Harga Arrow-Debreu pada keadaan i di level n dapat dihitung sebagai expected discounted value dari payoff, yaitu

$$\lambda_n^i = \mathrm{E}\left[e^{-rt}\mathbf{1}\left(S_t = S_n^i\right)|S_0 = S_0^0\right]\#(2.6)$$

dengan $\mathbf{1}(x)$ adalah fungsi indikator. Secara umum harga Arrow-Debreu dapat diperoleh dengan rumus iterasi sebagai berikut, dengan $\lambda_0^0 = 1$ sebagai definisi,

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^0 &= e^{-r\Delta t}[\lambda_n^0(1-p_1^n)], \\ \lambda_{n+1}^{i+1} &= e^{-r\Delta t}\left[\lambda_n^i p_{i+1}^n + \lambda_n^{i+1}(1-p_{i+2}^n)\right], \\ \lambda_{n+1}^{n+1} &= e^{-r\Delta t}[\lambda_n^n P_{n+1}]. \qquad \#(2.3) \end{aligned}$$

untuk $i = 0, 1, \dots, n-1$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi *Implied Binomial Tree*

Penelitian terdahulu menyatakan bahwa nilai volatilitas konstan tidak terjadi di dunia pasar modal yang nyata. *Implied volatility* yang tidak konstan menyebabkan adanya *volatility smile* dan *volatility skew* [5]. Volatility *smile* merupakan perubahan nilai *implied volatility* terhadap perubahan harga *strike* opsi, sedangkan volatility *skew* adalah perubahan nilai *implied volatility* terhadap perubahan waktu jatuh tempo [5]. Sebagai akibat dari hal tersebut, pada penelitian ini diturunkan formula pergerakan harga saham, harga Arrow-Debreu dan probabilitas transisi pada *implied binomial tree* berdasarkan [4].

Konstruksi *implied binomial tree* dibuat pada interval $[0, t]$ dengan beda waktu yang sama yaitu $\Delta t = t/n$. Dimulai pada level nol $(t = 0)$, nilai harga saham sama dengan harga saham pada saat ini yaitu $S_0^0 = S$. Terdapat $(n+1)$ titik pada level ke n dari *tree*. Selanjutnya, harga saham pada titik ke i level ke- n dinotasikan dengan S_n^i. Harga *forward* pada level $n+1$ titik dari S_n^i pada level ke n adalah $F_n^i = e^{rt}S_n^i$. Probabilitas bersyarat adalah probabilitas transisi pergerakan kenaikan harga saham dari (n, i) ke $(n+1, i+1)$ memenuhi persamaan

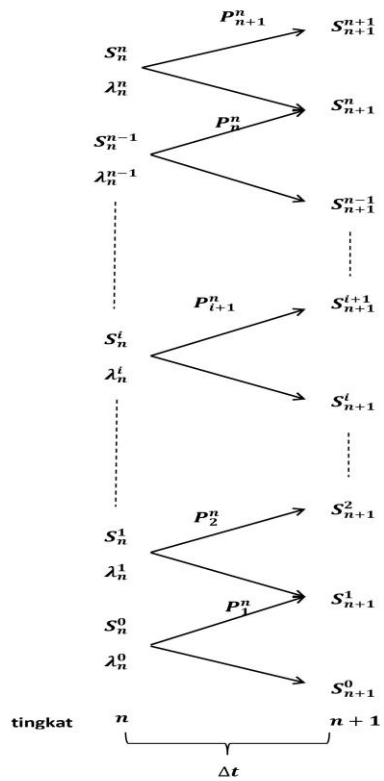
$$P_{i+1}^n = P(S((n+1)\Delta t)) = P(S_{n+1}^{i+1}|\, S(n\Delta t)),$$

dengan $i = 0,1,2,\cdots, n$. Harga *forward* memenuhi kondisi *risk neutral* sebagai berikut

$$F_n^i = P_{i+1}^n S_{n+1}^{i+1} + (1 - P_{i+1}^n)S_{n+1}^i.$$

Pendekatan *implied binomial tree* memerlukan perhitungan harga saham, probabilitas transisi dan harga Arrow-Debreu dilakukan secara iterasi dari level ke level, dimulai dari level nol. Ilustrasi diagram *implied binomial tree* disajikan pada Gambar 3.1. Pada Gambar 3.1 terlihat bahwa setiap harga saham pada suatu titik memiliki satu harga Arrow-Debreu yang bersesuaian.

Setiap harga saham memiliki kemungkinan untuk mengalami kenaikan dan penurunan. Berbeda dengan *binomial tree* yang setiap probabilitas kenaikan digeneralisir menggunakan faktor p, pada *implied binomial tree* setiap probabilitas kenaikan harga saham memiliki nilai yang berbeda, yaitu P_{i+1}^{n}.



Gambar 3.1. Ilustrasi *Implied binomial tree*

Selanjutnya, perhitungan harga opsi dihitung pada interval $t = n\Delta t$ menggunakan harga Arrow-debreu sebagai berikut

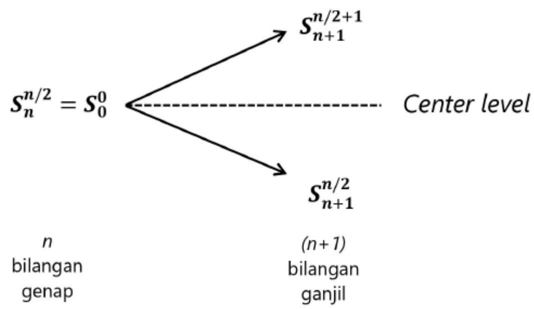
$$C\big((n+1)\Delta t, K\big) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{n+1}^{i} \max\big(S_{n+1}^{i} - K, 0\big),$$

$$P\big((n+1)\Delta t, K\big) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{n+1}^{i} \max\big(K - S_{n+1}^{i}, 0\big).$$

Pembentukan *implied binomial tree* ditentukan dari center level dan 2 titik yaitu titik tepat di atas dan di bawah *center level*. Titik yang berada di atas *center level* disebut dengan *upper node*, sedangkan titik yang berada di bawah *center level* disebut dengan *lower node*. Misalkan n adalah level yang menyatakan banyaknya langkah waktu, maka

1. Jika n merupakan bilangan genap, maka *central node* berada pada *center level* tersebut dengan $S_{n}^{\frac{n}{2}} = S_{0}^{0}$.

2. Jika $n+1$ merupakan bilangan ganjil, maka titik yang berada tepat di atas dan di bawah *center level* memiliki *proportional jump* sebagai berikut $\frac{S_{n+1}^{\frac{n}{2}+1}}{S_n^{\frac{n}{2}}} = \frac{S_n^{\frac{n}{2}}}{S_{n+1}^{\frac{n}{2}}}$.



Gambar 3.2. Ilustrasi *Center Level* pada *Implied Binomial Tree*

Selanjutnya, dengan menggunakan kondisi *risk neutral*, diperoleh formula iterasi dengan mengonstruksi *implied binomial tree* berikut

$$S_{n+1}^{i+1} = \frac{S_{n+1}^{i}(C((n+1)\Delta t, S_n^i)e^{r\Delta t} - \rho_u) - \lambda_n^i S_n^i (F_n^i - S_{n+1}^i)}{C((n+1)\Delta t, S_n^i)e^{r\Delta t} - \rho_u - \lambda_n^i S_n^i (F_n^i - S_{n+1}^i)},$$

dengan $\rho_u = \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_n^j (F_n^i - S_n^j)$.
Pada level $n+1$ ganjil, untuk menentukan harga saham S_{n+1}^j dengan $j = \frac{n}{2} + 1$ digunakan *proportional jump* sehingga diperoleh

$$S_{n+1}^{\frac{n}{2}+1} = \frac{S_n^{\frac{n}{2}}(C((n+1)\Delta t, S_n^{\frac{n}{2}})e^{r\Delta t} - \lambda_n^{\frac{n}{2}} S_n^{\frac{n}{2}} - \rho_u)}{\lambda_n^{\frac{n}{2}} F_n^{\frac{n}{2}} - C((n+1)\Delta t, S_n^{\frac{n}{2}})e^{r\Delta t} + \rho_u},$$

dengan $S_n^{\frac{n}{2}} = S_0^0$.
Harga saham pada *lower node* ditentukan dengan persamaan berikut

$$S_{n+1}^{i} = \frac{S_{n+1}^{i+1}(C((n+1)\Delta t, S_n^{\frac{n}{2}})e^{r\Delta t} - \rho_l) + \lambda_n^i S_n^i (F_n^i - S_{n+1}^{i+1}))}{C((n+1)\Delta t, S_n^{\frac{n}{2}})e^{r\Delta t} - \rho_l + +\lambda_n^i S_n^i (F_n^i - S_{n+1}^{i+1})},$$

dengan $\rho_l = \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_n^j (S_n^j - F_n^i)$.

3.2 Perhitungan Harga Opsi Jual dan Opsi Beli

Simulasi dilakukan dengan tiga metode yaitu b*inomial tree*, *implied binomial tree* dan harga opsi Black-Scholes. Pada *binomial tree*, volatilitas bernilai konstan, sedangkan pada *implied binomial tree* nilai volatilitas tidak konstan akibat pengaruh *implied volatility*. Hasil simulasi harga opsi jual dan beli dari *binomial tree* dan *implied binomial tree* dibandingkan terhadap harga opsi Black-Scholes. Nilai eror harga opsi beli dan jual dari binomial berturut-turut dihitung menggunakan formula eror relatif sebagai berikut

$$e_C = \frac{|C_{bs} - C_{bin}|}{C_{BS}},$$

$$e_P = \frac{|P_{bs} - P_{bin}|}{P_{BS}},$$

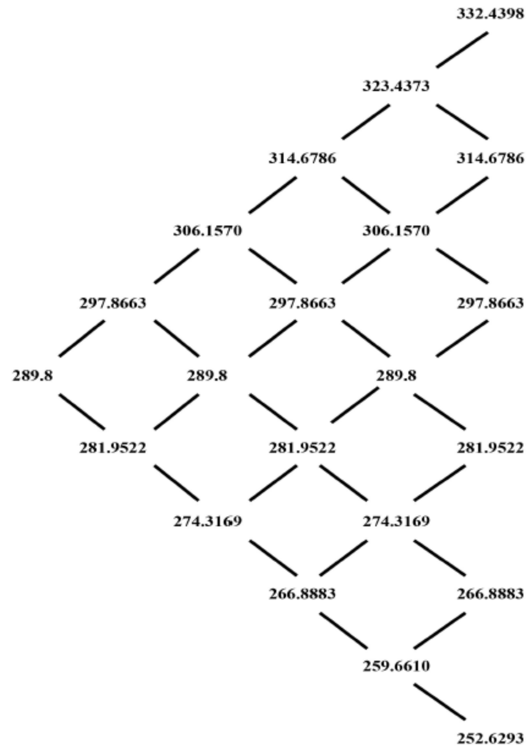
dimana C_{bs} merupakan harga opsi beli Black-Scholes, P_{bs} merupakan harga opsi jual Black-Scholes, C_{bin} menunjukkan harga opsi beli binomial dan P_{bin} menunjukkan harga opsi jual binomial. Perhitungan nilai eror relatif pada kasus ini sesuai dengan jenis data dan digunakan untuk menunjukkan besarnya tingkat kesalahan antara harga opsi binomial dengan harga opsi Black-Scholes. Semakin kecil nilai eror relatifnya, maka harga opsi yang diperoleh akan semakin baik.

Simulasi dilakukan dengan menggunakan harga saham awal sebesar 298.8 dan suku bunga bebas risiko pertahun senilai 1,57% dengan waktu jatuh tempo selama satu tahun dan opsi dalam keadaan *at the money* (ATM). Nilai *implied volatility* pada *at the money* (ATM) dari opsi adalah 6,138%, nilai *implied volatility* naik sebesar 0,5% atau turun sebesar 0,5% dari nilai awal setiap kenaikan atau penurunan harga saham sebesar 10. Hal tersebut mendefinisikan adanya penyertaan *implied volatility* pada metode *implied binomial tree*.

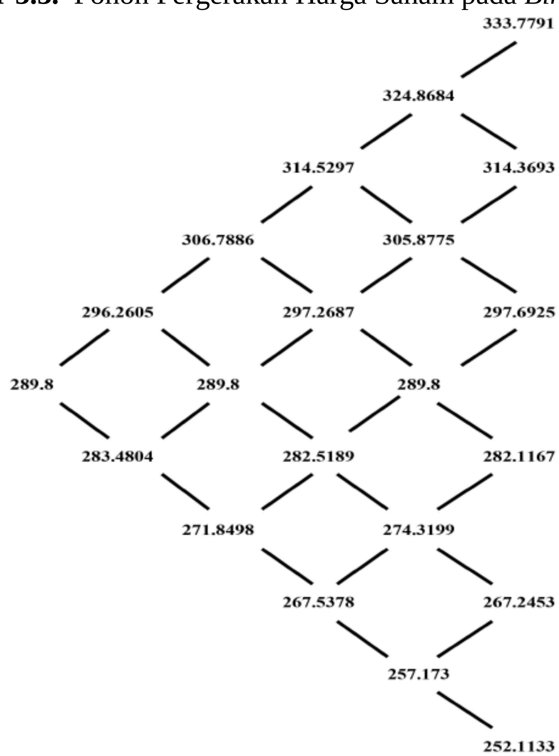
Hasil simulasi diperoleh bahwa formula opsi Black-Scholes menunjukkan bahwa harga opsi beli bernilai 9.5270 dan opsi jual bernilai 5.0127. Gambar 3.2 menunjukkan *binomial tree* dengan nilai volatilitas konstan 6.1388% pada setiap titik pada setiap level langkah waktu. Metode *binomial tree* ini tidak menyertakan *implied volatility*. Faktor kenaikan dan penurunan harga saham masing-masing digeneralisasi secara berturut-turut sebagai $u = 1.027$ dan $d = 0.9729$. Probabilitas transisi pada setiap level adalah $p = 0.5504$.

Perhitungan metode *binomial tree* memberikan harga opsi beli sebesar 9.8496 dan opsi jual sebesar 5.3352. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa terdapat eror relatif sebesar 0.3226 pada opsi beli dan eror relatif sebesar 0.3225 pada opsi jual terhadap opsi Black-Scholes.

Gambar 3.4, Gambar 3.5 dan Gambar 3.6 berturut-turut menunjukkan hasil perhitungan pohon harga saham, pohon probabilitas transisi dan pohon harga Arrow Debreu dengan menggunakan *implied binomial tree*. Ketiga pohon tersebut mengandung *volatility smile* dari *implied volatility* yaitu nilai *implied volatility* berubah bergantung terhadap perubahan harga saham. Pada Gambar 3.4, terdapat 21 harga saham yang dipertimbangkan untuk menentukan harga opsi. Harga saham mula-mula (pada $t = 0$) adalah 289,8. Setiap level *tree* menunjukkan pergerakan harga saham pada bulan ke $\frac{1}{n}$. Harga saham tertinggi yaitu 333,7791 dan harga saham terendah adalah 252,1133 pada satu tahun ke depan ($t = 1$).

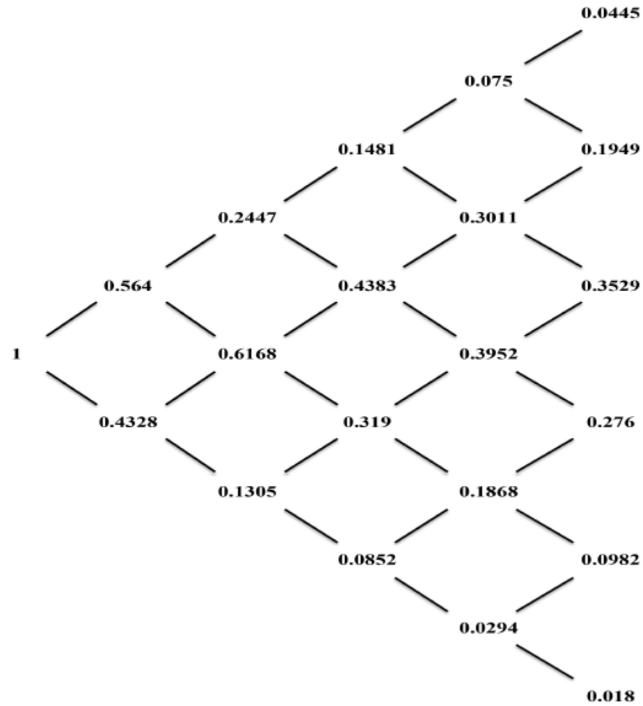


Gambar 3.3. Pohon Pergerakan Harga Saham pada *Binomial tree*

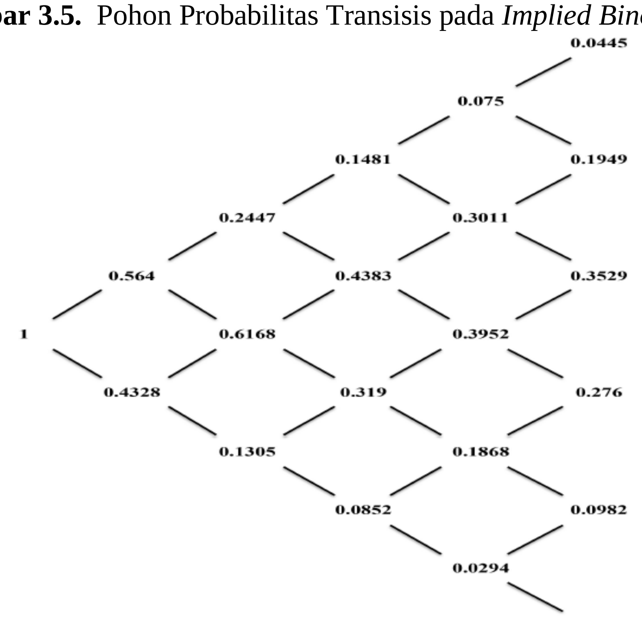


Gambar 3.4. Pohon Pergerakan Harga Saham pada *Implied binomial tree*

Probabilitas pergerakan harga saham ditunjukkan oleh Gambar 3.5. Pada level pertama, probabilitas harga saham naik sebesar 0,564 dan probabilitas harga saham turun sebesar 0,4328. Pada setiap level, probabilitas harga saham naik dan turun memiliki nilai yang berbeda.



Gambar 3.5. Pohon Probabilitas Transisis pada *Implied Binomial Tree*



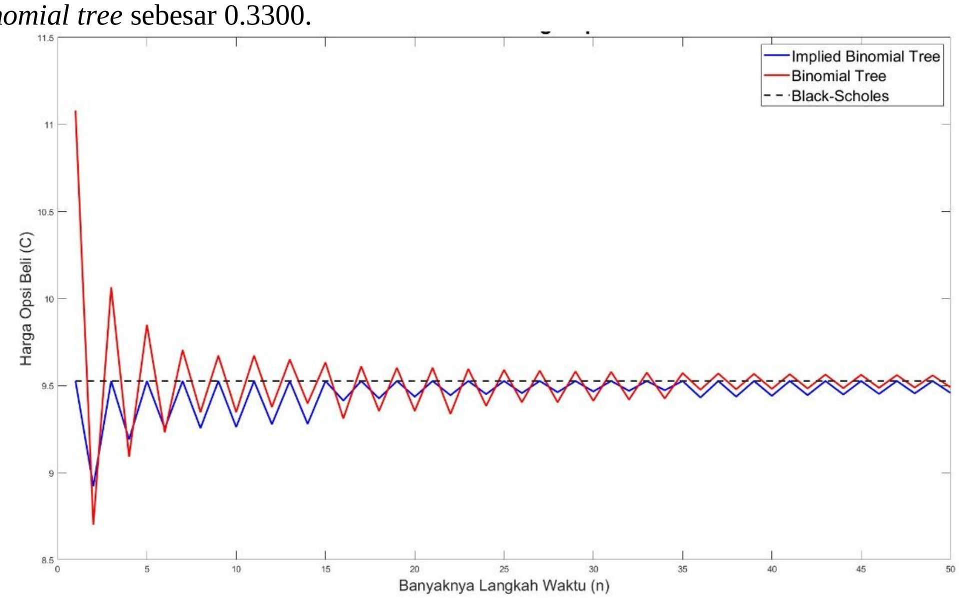
Gambar 3.6. Pohon Harga Arrow-Debreu pada *Implied Binomial Tree*

Metode *implied binomial tree* memerlukan konstruksi tiga macam pohon, yaitu pohon harga saham, pohon probabilitas transisi dan pohon harga Arrow-Debreu. Simulasi *implied binomial tree* menghasilkan harga opsi beli sebesar 9.527 dan harga opsi jual sebesar 5.0127. Dibandingkan dengan harga opsi Black-Scholes, nilai eror relatif harga opsi beli yang diperoleh dari *implied binomial tree* adalah 2.09×10^{-13} dan eror relatif harga opsi jual bernilai 3.98×10^{-13}. Nilai eror relatif tersebut dapat dikatakan bernilai kecil, oleh karena itu, *implied binomial tree* menunjukkan nilai mendekati harga opsi Black-Scholes pada level $n = 5$.

3.3 Peningkatan Nilai Langkah Waktu pada *Binomial Tree*

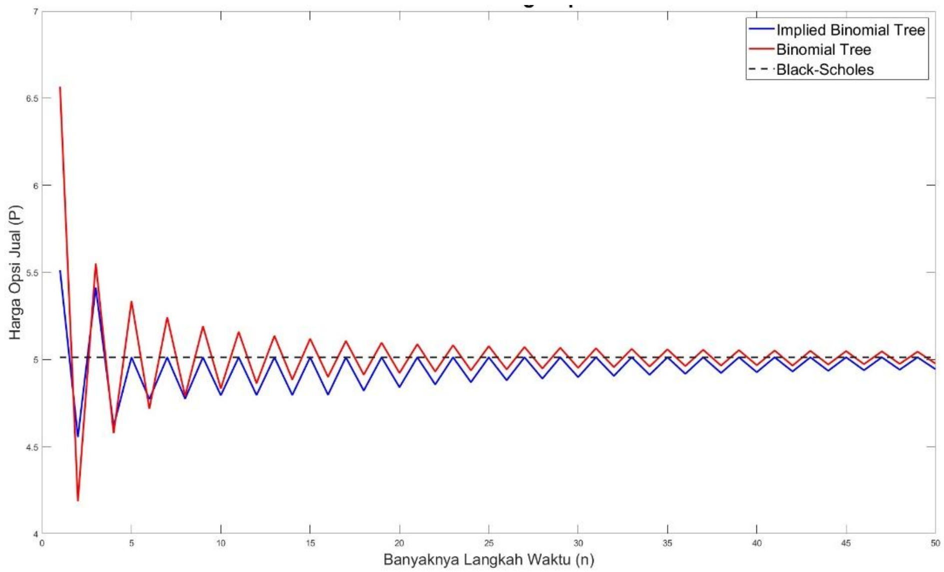
Ketika metode *binomial tree* digunakan dalam praktik penentuan harga opsi, masa hidup opsi biasanya dibagi menjadi 30 atau lebih langkah waktu [2]. Setiap langkah waktu terdapat pergerakan harga saham yang mengikuti pola Binomial. Misalkan terdapat sebanyak n langkah waktu, maka terdapat $n + 1$ titik harga saham dan 2^n kemungkinan jalur harga saham yang dipertimbangkan dalam penentuan harga opsi.

Untuk mengetahui pengaruh peningkatan nilai langkah waktu n terhadap harga opsi jual dan opsi beli, maka dilakukan simulasi dengan menggunakan nilai n berbeda. Gambar 3.7 menunjukkan pengaruh nilai n terhadap harga opsi beli. Berdasarkan Gambar 3.7 didapatkan bahwa harga opsi beli baik dari *binomial tree* maupun *implied binomial tree* berfluktuasi di antara harga opsi Black-Scholes. Semakin besar nilai n, maka harga opsi beli semakin mendekati harga opsi Black-Scholes. Hasil yang diperoleh dari *implied binomial tree* menunjukkan bahwa pada n bilangan ganjil diperoleh harga opsi jual yang sama dengan harga opsi jual Black-Scholes. Nilai eror rata-rata yang diperoleh dari simulasi *implied binomial tree* sebesar 0.3140, sedangkan pada simulasi *binomial tree* sebesar 0.3300.



Gambar 3.7. Harga Opsi Beli dengan Peningkatan Langkah Waktu

Simulasi pada opsi jual digambarkan pada Gambar 3.8. Perhitungan menunjukkan bahwa harga opsi jual dari *binomial tree* dan *implied binomial tree* berfluktuasi di antara harga opsi Black-Scholes. Semakin besar nilai n maka harga opsi beli semakin mendekati harga opsi Black-Scholes. Hasil simulasi pada *implied binomial tree* menunjukkan bahwa saat n bilangan ganjil diperoleh harga yang sama dengan harga opsi Black-Scholes. Nilai eror rata-rata yang diperoleh dari simulasi *implied binomial tree* sebesar 0.1372, sedangkan pada simulasi *binomial tree* sebesar 0.1490. Oleh karena itu, dari hasil simulasi diperoleh bahwa metode *implied binomial tree* memberikan hasil yang lebih baik daripada *binomial tree* berdasarkan nilai eror yang dihasilkan.



Gambar 3.8. Harga Opsi Jual dengan Peningkatan Level Langkah Waktu

3.3 Faktor-Faktor yang Berpengaruh terhadap Harga Opsi

Pada sub-bab ini, dicari faktor-faktor yang berpengaruh terhadap harga opsi jual dan opsi beli dengan melakukan simulasi menggunakan *implied binomial tree*, *binomial tree* dan model Black-Scholes. Variabel yang diteliti pengaruhnya adalah harga saham, harga *strike*, suku bunga dan waktu jatuh tempo. Simulasi dilakukan dengan mengatur perubahan nilai dari satu faktor tersebut dan faktor lainnya diasumsikan bernilai tetap. Selanjutnya, simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai yang sama pada simulasi sebelumnya. Nilai yang digunakan yaitu banyaknya level $n = 5$, harga *strike* $K = 298.8$, suku bunga $r = 1.57\%$, waktu jatuh tempo tiga bulan $(t = 0.25\ )$ dan volatilitas $\sigma = 6.3188\%$. Pertaman, untuk mengetahui pengaruh nilai harga saham terhadap harga opsi jual dan opsi beli dibuat simulasi dengan nilai harga saham berbeda, sedangkan nilai faktor lainnya lain tetap. Cara yang sama dilakukan untuk mengetahui pengaruh faktor harga *strike*, suku bunga dan waktu jatuh tempo. Berikut merupakan hasil simulasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap harga opsi.

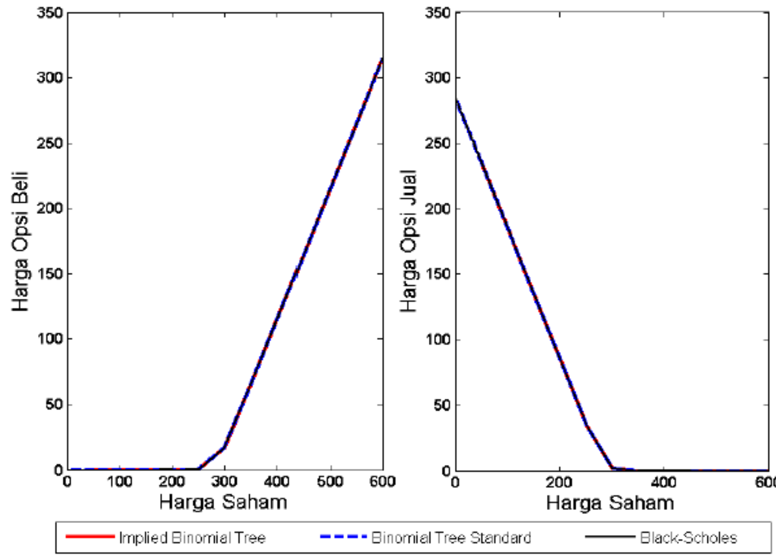
1. Harga saham

   Nilai harga saham yang disimulasikan berada pada selang $0 \leq S \leq 600$. Hasil simulasi pada Gambar 3.9. menunjukkan pengaruh harga saham terhadap harga opsi beli dan jual. Metode *implied binomial tree*, *binomial tree* d dan Black-Scholes memberikan hasil yang sama, yaitu semakin tinggi nilai harga saham mengakibatkan semakin tinggi harga opsi beli dan semakin rendah harga opsi jual. Hal tersebut bersesuain dengan model Black-Scholes. Berdasarkan Persamaan 2.3 dan Persamaan 2.4, didapatkan

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0\ ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial S} = -N(d_1) < 0\ ,$$

yaitu, ketika S naik, maka harga opsi beli naik dan harga opsi jual turun. Ketika harga saham naik, pemegang opsi beli menginginkan profit yang lebih tinggi di masa depan sehingga harga opsi beli naik. Sebaliknya, pemegang opsi jual akan lebih sulit mendapatkan profit sehingga harga opsi jual turun.



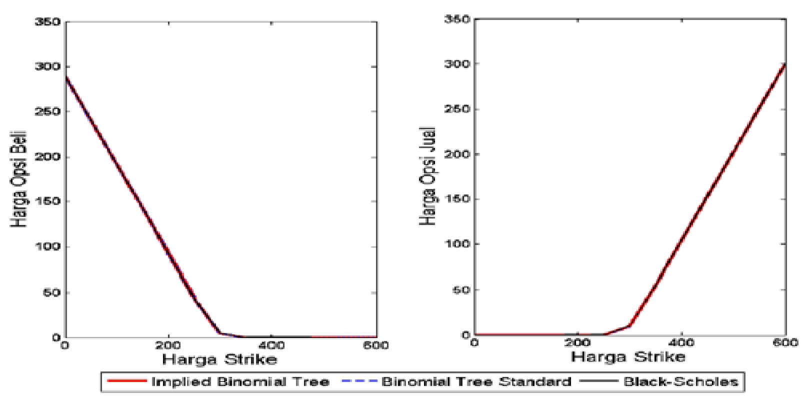
Gambar 3.9. Pengaruh Harga Saham terhadap Harga Opsi

2. Harga *strike*

Simulasi perbedaan harga *strike* ditampilkan pada Gambar 3.10. Berdasarkan hasil simulasi didapatkan bahwa peningkatan harga *strike* mengakibatkan penurunan harga opsi beli dan peningkatan harga opsi jual. Hasil simulasi bersesuaian dengan model Black-Scholes dengan berdasarkan Persamaan 2.2 dan Persamaan 2.3 didapatkan

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rT} N(d_2) < 0\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = e^{-rT}(1 - N(d_2)) > 0\,.$$



Gambar 3.10. Pengaruh Harga *Strike* terhadap Harga Opsi

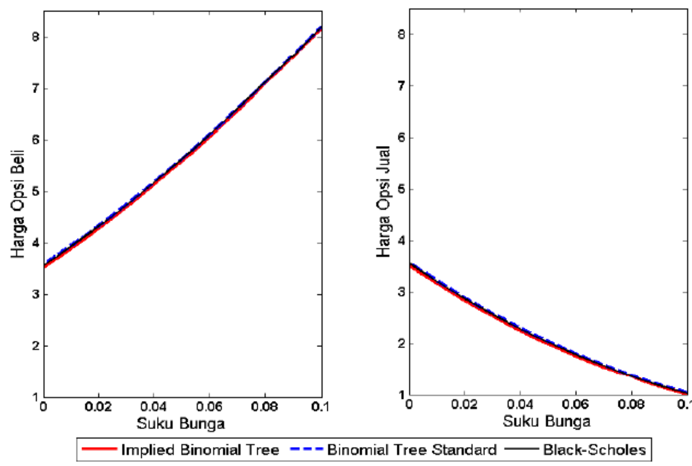
3. Suku bunga

Simulasi menunjukkan bahwa nilai tingkat suku bunga berpengaruh secara linier terhadap harga opsi. Gambar 3.11 menunjukkan semakin tinggi nilai suku bunga maka semakin tinggi harga opsi beli. Hal berbeda terjadi pada opsi jual, yaitu semakin tinggi nilai suku bunga maka semakin rendah harga opsi jual. Hal tersebut bersesuaian dengan model Black-Scholes bahwa

$$\frac{\partial C}{\partial r} = Kte^{-rt}N(d_2) > 0\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial S} = -Kte^{-rt}(1 - N(d_2)) < 0\,.$$

Kenaikan suku bunga memiliki dua pengaruh yaitu harga saham naik dan harga *strike* yang didapatkan pada waktu jatuh tempo memiliki nilai Ke^{-rt} yang rendah pada saat ini. Oleh karena itu, terjadi penuurunan harga opsi jual dan peningkatan harga opsi beli.



Gambar 3.11. Pengaruh Suku Bunga terhadap Harga Opsi

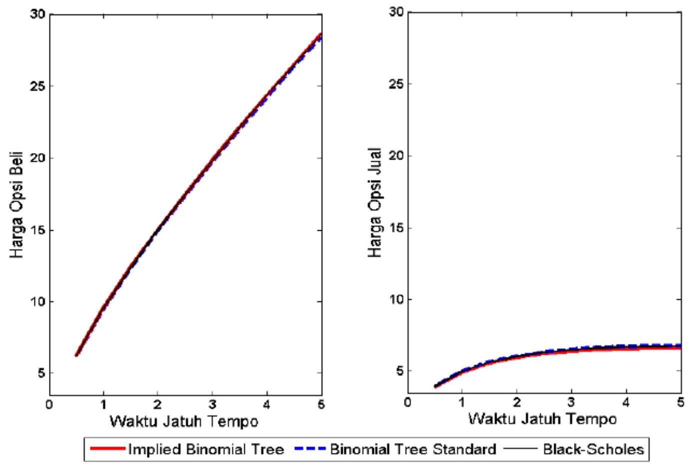
4. Waktu jatuh tempo

Derivatif parsial model Black-Scholes terhadap waktu jatuh tempo adalah

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rKte^{-rt}N'(d_2) + \frac{\sigma SN'(d_1)}{2\sqrt{t}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -rKte^{-rt}\left(1 - N'(d_2)\right) + \frac{\sigma SN'(d_1)}{2\sqrt{t}}.$$

Tidak dapat dipastikan tanda dari ruas kanan dari dua persamaan diatas, sehingga dari model Balck-Scholes tidak dapat memprediksi pengaruh waktu jatuh tempo terhadap harga opsi. Namun, berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 3.12 menunjukkan bahwa harga opsi beli dan opsi jual semakin tinggi seiring meningkatnya waktu jatuh tempo. Simulasi pada opsi jual diperoleh bahwa harga opsi semakin tinggi dengan peningkatan waktu jatuh tempo, namun dengan tingkat peningkatan yang lebih rendah jika dibandingkan dengan peningkatan pada opsi beli.



Gambar 3.12. Pengaruh Waktu Jatuh Tempo terhadap Harga Opsi

3. KESIMPULAN

Pada artikel ini, model harga opsi dilakukan dengan metode *implied binomial tree* dan *binomial tree* , kemudian dibandingkan hasilnya dengan model Black-Scholes. Penggunaan metode *implied binomial tree* dapat menyertakan perubahan nilai *implied volatility* di pasar keuangan. Harga opsi berdasarkan metode *implied binomial tree* memberikan nilai eror harga opsi yang lebih kecil terhadap harga opsi Black-Scholes dibandingkan dengan harga opsi yang diperoleh dari metode *binomial tree* . Pada metode *implied binomial tree* dan *binomial tree* , semakin besar nilai langkah waktu, harga opsi konvergen menuju harga opsi Black-Scholes.

Berdasarkan simulasi, diperoleh faktor-faktor yang berpengaruh terhadap harga opsi jual dan opsi beli. Faktor-faktor tersebut adalah harga saham, harga *strike*, suku bunga, dan waktu jatuh tempo. Semakin tinggi nilai harga saham, maka semakin tinggi harga opsi beli dan semakin rendah harga opsi jual. Semakin tinggi nilai harga *strike*, maka semakin rendah harga opsi beli dan semakin tinggi harga opsi jual. Semakin tinggi nilai suku bunga, maka semakin tinggi harga opsi beli dan semakin rendah harga opsi jual. Semakin lama waktu jatuh tempo, maka semakin tinggi harga opsi beli dan opsi jual.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Barle, S. & Cakici, N., 1998. How To Grow a Smiling Tree. *The Journal of Financial Engineering*, Vol. 7, No. 2, 127-146.

[2]. Black, F. & Scholes, M., 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 637-654.

[3]. Brigham, E. F. & Daves, P. R., 2019. *Intermediate Financial Management,* Thirteenth Edition. Cengage Learning., United States of America.

[4]. Derman, E. & Kani, I., 1994. Riding on A Smile. *Risk*, Vol. 7, No. 2, 32-39.

[5]. Derman, E. & Miller, M. B., 2016. *The Volatility Smile*. John Wiley & Sons, Inc., Canada.

[6]. Emmanuel, F., Adedoyin, A. O. & Hammed, O. O., 2014. Performance Measure of Binomial Model for Pricing American and European Options. *Applied and Computational Mathematics*, Vol. 3, No. 6, 18-30.

[7]. Gatheral, J., Jaisson, T. & Rosenbaum, M., 2022. *Volatility Is Rough. In Commodities*, Second Edition. Chapman and Hall., London.
[8]. Härdle, W. K., Hautsch, N. & Overbeck, L., 2009. *Applied Quantitative Finance*, Second Edition. Springer., Berlin.
[9]. Huang, D., Schlag, C., Shaliastovich, I. & Thimme, J., 2019. Volatility-of-Volatility Risk. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 54, No. 6, 2423-2452.
[10]. Hull, J., 2022. *Options, Futures, and Other Derivatives*, Eleventh Edition. Pearson Education Inc., New York.
[11]. Horvath, B., Muguruza, A. & Tomas, M., 2021. Deep Learning Volatility: A Deep Neural Network Perspective on Pricing and Calibration in (Rough) Volatility Models. *Quantitative Finance*, Vol. 21, No.1, 11-27.
[12]. Jiang, L. & Li, C., 2005. *Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
[13]. Jiang, Q., 2019. Comparison of Black–Scholes Model and Monte-Carlo Simulation on Stock Price Modeling. *Advances in Economics, Business and Management Research*, Vol. 109, 135-137.
[14]. Kim, Y. S., Stoyanov, S., Rachev, S. & Fabozzi, F. J., 2019. Enhancing Binomial and Trinomial Equity Option Pricing Models. *Finance Research Letters*, Vol. 28, 185-190.
[15]. Liu, Y. F., Zhang, W. & Xu, H. C. 2014. Collective Behavior and Options Volatility Smile: An Agent-Based Explanation. *Economic modelling*, Vol. 39, 232-239.
[16]. Maulida, V., Siswanah, E. & Nisa, E. K., 2019. Penentuan Harga Opsi Tipe Eropa dengan Model Binomial. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, Vol. 1, No. 1, 65-72.
[17]. Muroi, Y., 2022. *Discrete Malliavin Greeks. In Computation of Greeks Using the Discrete Malliavin Calculus and Binomial Tree.* Springer., Singapore.
[18]. Muroi, Y. & Suda, S., 2022. Binomial Tree Method for Option Pricing: Discrete Cosine Transform Approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 198, 312-331.
[19]. Ni, S. X., Pearson, N. D., Poteshman, A. M. & White, J., 2021. Does Option Trading Have A Pervasive Impact on Underlying Stock Prices?. *The Review of Financial Studies*, Vol. 34, No. 4, 1952-1986.
[20]. Nian, K., Coleman, T. F. & Li, Y., 2021. Learning Sequential Option Hedging Models from Market Data. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 133, 106277.
[21]. Roul, P., 2022. Design and Analysis of A High Order Computational Technique for Time-Fractional Black–Scholes Model Describing Option Pricing. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 45, No. 9, 5592-5611.
[22]. Rubinstein, M., 1994. Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, Vol. 49, No. 3, 771-818.
[23]. Simarmata, J. E. & Ahzan, Z. N., 2021. The Use of The Black Scholes Model in Determining the Price of the European Type Option. *Journal of Research in Mathematics Trends and Technology*, Vol. 3, No. 2, 2021, 15-25.
[24]. Soini, V. & Lorentzen, S., 2019. Option Prices and Implied Volatility in The Crude Oil Market. *Energy Economics*, Vol 83, 515-539.
[25]. Srivastava, A. & Shastri, M., 2020. A Study of Black–Scholes Model's Applicability in Indian Capital Markets. *Paradigm*, Vol. 24, No. 1, 73-92.
[26]. Subartini, B., Riaman, R., Nabiilah, N. & Sukono, S., 2021. Analisis Penerapan Metode Pohon Binomial dan Metode Black-Scholes dalam Penentuan Harga Opsi Beli. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, Vol. 6, No. 2, 260-266.

[27]. Vagnani, G., 2009. The Black–Scholes Model as A Determinant of The Implied Volatility Smile: A Simulation Study. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 72, No.1, 103-118.

[28]. Vulandari, R. T. & Sutrima., 2020. Black-Scholes Model of European Call Option Pricing in Constant Market Condition. *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, Vol. 6, No. 2, 46-49.